Rencontre de l'ANR
Contraintes d'Einstein : passé, présent et futur

Laboratoire de Mathématiques d'Avignon
27, 28 et 29 mai 2024
Site Sainte Marthe, salle 2E07, 74 rue Louis Pasteur, 84000 Avignon.

- Lundi 27 mai

  15h-16h. **Eric Gourgoulhon**
  "SageManifolds: differential geometry with SageMath"

  16h30-17h30. **Xavier Bekaert**
  "Carrollian geometry at null infinity.".

- Mardi 28 mai

  9h30-10h30. **Piotr Chruściel**
  "The mass of two-dimensional locally asymptotically hyperbolic Riemannian manifolds"

  11h00-12h00. **Marc Herzlich**
  "Masse et centre de masse d'ordre supérieur."

  15h-16h. **Emmanuel Humbert**
  "Sur le spectre de l'opérateur de Yamabe"

  16h30-17h30. **Paul Laurain**
  "Théorème de la masse positive pour la Q-courbure. "

- Mercredi 29 mai

  9h30-10h30. **Bruno Le Floch**
  "Optimal localization for the Einstein constraints"

  11h00-12h00. **Emmanuel Trélat**
  "Des planètes géantes gazeuses à la théorie spectrale de Laplaciens sous-elliptiques"

Résumés

Xavier Bekaert

Carrollian geometry at null infinity.

The Carroll group is the name (proposed by Levy-Leblond in 1965) for the Inonu-Wigner contraction of the Poincaré group that arises in the ultrarelativistic limit (when c goes to zero). By now, a popular name for a manifold endowed with a degenerate metric of null signature (0,+,...,+) is a 'Carrollian manifold' (the paradigmatic example is the induced geometry of a null hypersurface inside a Lorentzian spacetime). A motivation for this terminology is that the isometry group of a flat Carrollian manifold is the infinite-dimensional extension of the Carroll group by supertranslations. In particular, the celebrated Bondi-Mezner-Sachs group of asymptotic symmetries for asymptotically flat spacetimes identifies with the conformal extension of the Carroll group.

Piotr Chruściel

The mass of two-dimensional locally asymptotically hyperbolic Riemannian manifolds

I will review the surprising properties of the mass as in the title.

Eric Gourgoulhon

SageManifolds: differential geometry with SageMath

The SageManifolds project [1] is devoted to implementing differential geometry in the Python-based free computer algebra system SageMath [2]. I shall describe some implementation details, as well as various applications regarding pseudo-Riemannian manifolds, such as - computing geodesics - computing the first and second fundamental forms of a hypersurface - checking the 3+1 Einstein equations (constraints + dynamical equations)

[1] https://sagemanifolds.obspm.fr/
[2] https://www.sagemath.org/

Marc Herzlich

Masse et centre de masse d'ordre supérieur.

Il existe sur les variétés asymptotiquement plates deux invariants asymptotiques inspirés par la relativité générale : la masse (le plus connu) et le centre de masse (dont l'existence demande des conditions de décroissance plus exigeantes). Des masses d'ordre supérieur ont été définies plus récemment (vers 2013-2015) et indépendamment par Li et Nguyen et par Ge, Wang et Wu. Nous expliquerons comment on peut définir des centres de masse d'ordre supérieur, et nous donnerons une nouvelle preuve de l'invariance géométrique des invariants de Ge-Wang-Wu/Li-Nguyen.

Emmanuel Humbert

Sur le spectre de l'opérateur de Yamabe

Si (M, g) est une variété riemannienne compacte, l'opérateur de Yamabe $L_g := 4(n-1)/(n-2)\Delta_g + Scal_g$ permet de lier les courbures scalaires de deux métriques conformes. Le célèbre problème de Yamabe revient, même s'il n'a pas été énoncé sous cette forme, à minimiser sa première valeur propre dans une classe conforme de métriques de volume fixé. Dès lors, il est naturel de comprendre ce qui se passe pour les valeurs propres d'ordre supérieur. En 2006, avec B. Ammann, nous avions traité le cas de la seconde valeur propre lorsqu'elle est positive. D'autres travaux avec des méthodes très similaires ont adapté ces résultats à d'autres opérateurs. En 2021, Gursky et Perez-Ayala ont développé de nouvelles méthodes pour traiter le cas où la seconde valeur propre est négative lorsque L_g n'a pas de noyau. Dans ce travail en collaboration avec R. Petrides (Paris) et B. Premoselli (Bruxelles), nous traitons le cas de toutes les valeurs propres, positives ou négatives, avec ou sans présence de noyau par des méthodes encore différentes. J'expliquerai comment traiter les deux difficultés majeures (et la raison pour laquelle ce sont des difficultés) : la présence d'un noyau et l'apparition de points de concentration multiples lors de l'étude des valeurs propres d'ordre élevé.

Paul Laurain

Théorème de la masse positive pour la Q-courbure.

Après quelques rappels sur le théorème classique de la masse positive, je ferai une introduction à la notion de Q-courbure. Je montrerai en particulier qu'il s'agit de la généralisation naturelle de la courbure de Gauss et dimension 4. Enfin je donnerai un équivalent de la masse positive ou la courbure scalaire est remplacée par la Q-courbure.

Bruno Le Floch

Optimal localization for the Einstein constraints

In 2014, Carlotto and Schoen constructed initial data sets that solve the vacuum Einstein constraints and that interpolate between any asymptotically-flat vacuum solution in a cone and Euclidean space outside a wider cone. Starting from a naive interpolation (g,K) of the two solutions to be glued, they corrected it to an exact solution that is asymptotic flat with a power-law decay slightly worse than that of (g,K). With Philippe G. LeFloch, we reached an optimal version of their gravitational shielding by proving estimates whose power-law decay is controlled by the accuracy with which (g,K) solves the constraints, even beyond harmonic decay (namely the decay rate of black hole metrics). At the harmonic decay rate, we encounter corrections arising from a silhouette function and vector, as we call them, in the kernel of asymptotic operators built from the linearized constraints. Our work allows for very slow decay of the metrics, in which case one must define the relative ADM energy and momentum of a pair of sufficiently close initial data sets.

Emmanuel Trélat

Des planètes géantes gazeuses à la théorie spectrale de Laplaciens sous-elliptiques

Il s'agit d'un travail en cours avec Yves Colin de Verdière, Maarten De Hoop, Charlotte Dietze, motivé par un travail récent de M. De Hoop sur des problèmes inverses pour des planètes géantes gazeuses.
Sur de telles planètes, la vitesse du son est isotrope et tend vers zéro à la surface. Géométriquement, cela correspond à une variété Riemannienne à bord dont la métrique explose près du bord.
Par des changements de variable adéquats, on ramène l'étude du Laplacien-Beltrami à celle d'un Laplacien dégénéré, similaire à ceux qu'on rencontre en géométrie sous-Riemanienne.
Dans cet exposé j'expliquerai comment aborder l'analyse spectrale de tels opérateurs, notamment comment calculer la loi de Weyl.