

Contributions aux Inéquations Quasi-Variationnelles : Unicité de la Solution de Viscosité, Discrétisation et Dégénérescence : Exemple des coûts de Transaction Proportionnels dans l'Approche Robuste de Tarification des Options

Naïma El Farouq*

Résumé

Dans cette présentation, je m'intéresserai à des inéquations quasi-variationnelles (IQV) associées à des problèmes de contrôle mixte, continu et impulsionnel en horizon infini, avec des contrôles impulsionnels et des coûts d'impulsions sous forme générale. Nous avons d'abord supposé que le coût des impulsions est une fonction positive. Nous donnons les résultats concernant la régularité de la fonction Valeur du problème de contrôle impulsionnel, et nous montrons qu'elle est l'unique solution de viscosité de l'IQV de Hamilton-Jacobi du premier ordre associée. Nous proposons également des schémas de discrétisation de cette IQV, y compris un schéma de discrétisation naturel. Nous donnons le résultat de convergence de la fonction Valeur approximée vers la fonction Valeur du problème de contrôle impulsionnel et nous donnons le taux de convergence. Nous montrons aussi que ces résultats peuvent être étendus au cas non stationnaire.

Je m'intéresserai par la suite au cas d'une IQV dégénérée où dans ce cas, l'infimum des coûts des impulsions est égal à zéro. La fonction Valeur de ce type de problème est une solution de viscosité de l'IQV classique associée, mais pas l'unique solution de viscosité. Ceci est un inconvénient pour la caractériser. Nous introduisons donc une nouvelle IQV différentielle pour laquelle la fonction Valeur est l'unique solution de viscosité. Ceci nous a permis d'approximer la fonction Valeur. Nous donnons donc également des approximations de cette nouvelle IQV, et nous prouvons que la fonction Valeur approximée converge, localement uniformément, vers la fonction Valeur du problème de contrôle impulsionnel où l'infimum des coûts des impulsions est égal à zéro. Nous avons choisi l'exemple classique de gestion de stocks en temps continu dans \mathbb{R}^n pour illustrer ces résultats.

Je considérerai ensuite une IQV en horizon fini associée à un problème de jeu différentiel impulsionnel ou de contrôle impulsionnel de type minimax, provenant de problèmes de calcul de prix d'option en finance. Le modèle que je vais considérer, inventé par Pierre Bernhard, est connu sous le nom de modèle de marché à intervalles ; il repose sur une approche de contrôle robuste comprenant une stratégie de couverture et proposant un prix d'option optimal. Nous supposons que les coûts de transaction sont de type proportionnel, l'IQV d'Isaacs du modèle est hautement dégénérée et elle n'admet pas une unique solution de viscosité qui serait la fonction Valeur du problème de contrôle impulsionnel. Nous avons contourné le problème et travaillé sur un problème de jeu équivalent, qui cette fois, ne possède plus d'impulsions. Nous avons prouvé que la suite des interpolées linéaires en temps des fonctions Valeur discrètes des jeux en temps discret converge, uniformément sur tout compact, vers l'unique solution de viscosité de l'IQV du nouveau jeu équivalent sans impulsions, qui est la fonction Valeur du problème impulsionnel de tarification de prix d'option.

Dans la dernière partie de l'exposé, je parlerai d'un problème de contrôle impulsionnel servant de modèle avec délai qui pourrait fournir des politiques optimales pour le traitement de maladies cancéreuses.

*Université Clermont Auvergne, Complexe scientifique des Cézéaux, 3 place Vasarely, TSA 60026, CS 60026, 63178 Aubière Cedex