

PROPOSITION DE SUJET DE THESE
CONTRATS DOCTORAUX 2020-2023

Appel ciblé (merci de cocher la case correspondante):

Contrat doctoral ministériel ED 536

Contrat doctoral ministériel ED 537

Directeur de thèse : TERENCE BAYEN (Université d'Avignon)

Co-directeur : LOÏC BOURDIN (Université de Limoges)

Co-encadrant éventuel : FLORENT NACRY (Université de Perpignan)

Titre en français : Contrôle optimal hybride : conditions d'optimalité et applications

Titre en anglais : Hybrid optimal control : optimality conditions and applications

Mots-clés : Contrôle optimal – Systèmes hybrides – Conditions d'optimalité – Optimisation – Principe du maximum de Pontryagin – Problèmes de temps de crise – Contrôle non-permanent

Co-tutelle : Oui **Pays :** France

Opportunités de mobilité à l'international du doctorant dans le cadre de sa thèse : Oui
(déplacement au Chili dans la mesure du possible, Université du Chili – Center for Mathematical Modeling et/ou Université Santa Maria)

Profil du candidat : Cours en Mathématiques (Licence de Mathématiques et Master en Mathématiques Appliquées)

Présentation détaillée du sujet:

Un système dynamique *hybride* est, par définition, un système dynamique défini par morceaux sur une partition de l'espace d'état. Il est donc la donnée de plusieurs systèmes, chacun étant défini sur une strate, et le système global évolue d'un mode à un autre en fonction de sa position spatiale.

Cette thèse vise l'étude de systèmes dynamiques hybrides *contrôlés*, c'est-à-dire de systèmes dynamiques hybrides sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande, pour lesquels notre objectif est de déterminer un contrôle qui optimise un certain critère donné. On parle

alors de *problèmes de contrôle optimal hybrides* qui sont la thématique principale de cette thèse. Ces problèmes interviennent dans de nombreuses applications comme, par exemple, en robotique lorsque l'on est amené à optimiser la trajectoire d'un système commandé qui voit changer, au cours du temps et en fonction de sa position spatiale, le nombre de ses degrés de liberté. Un autre exemple est donné par les problèmes de *temps de crise* (voir [2,3]) dans lesquels l'objectif est de minimiser le temps passé par une trajectoire contrôlée à l'extérieur d'un certain sous-ensemble de l'espace d'état (représentant des contraintes spatiales désirées). La résolution de ce type de problèmes est fondamentale dans le but de déterminer des commandes qui respectent le plus longtemps possible des contraintes voulues. Les formulations mathématiques correspondantes conduisent naturellement à des problèmes de contrôle optimal hybrides. On retrouve les problèmes de temps de crise notamment dans les problématiques liées à l'épidémiologie ou à la préservation d'espèces dont les évolutions sont interprétées mathématiquement par des modèles de type proie-prédateur (voir [3]).

La théorie classique du contrôle optimal a été largement développée à partir des années 1950 dans le cas où le système est décrit par une seule dynamique (système non hybride). Des conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre (appelées principe du maximum de Pontryagin) ont déjà été obtenues dans le cadre hybride à partir du début du 21^{ème} siècle. En revanche, les difficultés rencontrées et la technicité requise sont telles que ce cadre n'est pas encore entièrement maîtrisé et de nombreux problèmes sont encore ouverts (par exemple les conditions nécessaires d'optimalité du second ordre, importantes pour l'analyse numérique de ces problèmes, ne sont pas encore établies). Un des enjeux de cette thèse sera de fournir de nouvelles méthodes et de nouveaux résultats mathématiques pour la résolution de problèmes de contrôle optimal hybrides.

Dans un premier temps, l'objectif de cette thèse est de se familiariser avec la littérature autour des problèmes de contrôle optimal hybrides. L'étudiant.e sera alors amené.e à maîtriser un cadre mathématique permettant d'obtenir les conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre. Différentes approches pourront être envisagées, comme par exemple l'application du principe variationnel d'Ekeland combinée à l'utilisation de perturbations en aiguilles du contrôle optimal qui sont tous deux des outils fondamentaux pour l'obtention d'un principe du maximum de Pontryagin. Dans un second temps, le cas de contrôle *non-permanent par strate* sera étudié en profondeur : il s'agit d'une classe de problèmes de contrôle optimal hybrides dans lesquels, selon la position spatiale du système, on peut agir ou non sur la trajectoire. Ce type de problèmes se retrouve notamment dans le domaine de l'aérospatial lorsque des véhicules traversent des zones dites d'ombre. Le but est alors de trouver les conditions d'optimalité dans ce cadre. Dans un troisième temps, un des objectifs de la thèse sera d'aborder les conditions nécessaires d'optimalité du second ordre dans les contextes hybrides et/ou à contrôle non-permanent qui forment, comme mentionné plus haut, un problème complètement ouvert dans ces deux cadres.

Parallèlement, le sujet de thèse proposera d'approfondir l'étude d'exemples applicatifs dans lesquels interviennent les systèmes hybrides, en particulier les problématiques liées à la

préservation d'espèces mentionnées plus haut. L'objectif sera de calculer des synthèses optimales (voir par exemple [1]) pour ces problèmes grâce en particulier aux conditions d'optimalité développées dans la partie méthodologique de la thèse. Ceci permettra, d'une part, de mettre en lumière l'utilisation des outils développés dans cette thèse et, d'autre part, d'envisager l'optimisation de modèles pour lesquels les outils d'étude étaient insuffisants jusqu'à présent. A titre d'exemple, mentionnons le problème d'étendre l'étude d'un modèle de dynamique de populations effectuée dans [3] au cadre non-permanent par strate (proposé dans la partie méthodologique de la thèse). Cette question portant sur le calcul effectif de contrôles optimaux par les méthodes indirectes développées dans cette thèse pourra être abordée par le.la candidat.e.

Domaine/Thématique : Optimisation – Contrôle – Analyse

Objectif : Le.la candidat.e aura pour tâche principale de travailler sur des aspects méthodologiques de la commande optimale. En parallèle, il.elle s'investira aussi sur l'étude d'applications issues de la modélisation en lien avec la partie méthodologique.

Le premier aspect de la thèse consistera donc à renforcer les outils existants dans le domaine du contrôle optimal hybride et d'étendre certains théorèmes existants sur les conditions nécessaires d'optimalité (comme le principe du maximum de Pontryagin) à des cadres plus généraux (notamment les systèmes hybrides à contrôle non-permanent par zone). Pour cela, le.la candidat.e s'appuiera sur un certain nombre d'articles et d'ouvrages standards en commande optimale (afin de s'approprier les techniques d'analyse usuelles dans ce domaine) ainsi que sur plusieurs articles récents effectués par les encadrants (voir [2,3,5,6,7]). Ces articles serviront de point de départ pour aborder les problématiques nouvelles proposées dans ce sujet de thèse et envisager l'obtention de résultats nouveaux.

Le second aspect sur lequel le.la candidat.e s'investira est lié à des applications de la commande optimale et le calcul de synthèses optimales dans divers domaines (voir par exemple [1] et [3,4,7]). Le.la candidat.e sera amené.e à étudier des exemples concrets : il s'agira de comprendre comment les conditions nécessaires d'optimalité obtenues pourront s'appliquer pour calculer les trajectoires optimales en pratique. Nous pourrions en particulier envisager des modèles simples de dynamique de populations dans le cadre hybride et/ou à contrôle non-permanent par strate (zone d'ombre). Cela lui permettra de mettre en évidence les résultats théoriques obtenus dans la première partie de la thèse. Le.la candidat.e pourra également travailler sur la recherche de contrôles optimaux pour des problèmes nouveaux (par exemple en écologie, écologie microbienne, préservation d'espèces : voir par exemple [3,4]). L'étude de ces problèmes pourra donner lieu à des simulations numériques par méthode de tir [1,6] (basées sur l'application d'un principe du maximum de Pontryagin) ou par méthode directe (discrétisation du modèle et optimisation par routines/solver comme IPOPT).

Contexte et enjeux : Le sujet de thèse s'inscrit dans la continuité de plusieurs travaux récents effectués par les encadrants (voir [1,2,3,4,5,6,7,8]) sur les problèmes de temps de crise et sur la théorie du contrôle optimal non-permanent. Le problème du temps de crise (voir [2,3]) peut

naturellement s'exprimer comme un système hybride à plusieurs strates (bien que d'autres approches soient possibles comme des méthodes de régularisation, voir [3]). Ce problème s'avère être très lié au contrôle non-permanent car en pratique, il est souhaitable de pouvoir agir sur le système seulement dans certaines zones de l'espace d'état (les zones où l'on ne peut agir étant appelées zones d'ombre). Ainsi, le sujet de thèse se propose de mettre en relation les travaux sur le temps de crise et le contrôle non-permanent effectués par Térrence BAYEN et Loïc BOURDIN afin de développer un cadre général et global à ces problèmes. L'étudiant.e bénéficiera de l'expertise des encadrants en contrôle optimal et en modélisation.

Les problèmes de contrôle optimal non-permanent ou de type temps de crise revêtent aujourd'hui une grande importance dans de nombreuses applications. On peut mentionner l'importance de ces problèmes dans le domaine de l'aérospatial et, par exemple, pour trouver la meilleure commande possible pour guider un satellite avec passages dans des zones d'ombre (zones de non-contrôle). D'autres problèmes issus par exemple du domaine de l'écologie ou de la biologie se modélisent de façon similaire, par exemple, lorsque l'on souhaite maintenir une population au-dessus d'un certain seuil donné. L'objectif de cette thèse est donc essentiel : il s'agit de développer plus en avant la théorie de la commande optimale pour pouvoir donner des solutions qualitatives aux différents problèmes posés dans ces domaines. D'une part, les simulations numériques ne donnent pas nécessairement toutes les informations qualitatives souhaitées sur les trajectoires optimales. D'autre part, aujourd'hui, les outils mathématiques de la commande optimale ne couvrent pas nécessairement toutes les situations pratiques. Ces considérations mettent donc en avant la nécessité de continuer les développements et les avancées mathématiques dans le domaine du contrôle optimal hybride.

Références bibliographiques :

- [1] T. Bayen, O. Cots, *Tangency property and prior-saturation points in minimal time problems in the plane*, soumis, décembre 2019.
- [2] T. Bayen, L. Pfeiffer, *Second-order analysis for the time crisis problem*, Journal of Convex Analysis, vol. 27, 1, pp.139–163, 2020.
- [3] T. Bayen, A. Rapaport, *Minimal time crisis versus minimum time to reach a viability kernel : a case study in the prey-predator model*, Optimal Control Appl. Methods, vol. 40, 2, pp. 330–350, 2019.
- [4] T. Bayen, O. Cots, P. Gajardo, *Analysis of an optimal control problem related to anaerobic digestion process*, Journal of Optim. Theory and Applications, vol. 178, 2, pp 627–659, 2018.
- [5] L. Bourdin, E. Trélat, *Optimal sampled-data control, and generalizations on time scales*, Mathematical Control and Related Fields, vol. 6 (1), pp.53–94, 2016.

- [6] L. Bourdin, G. Dhar, *Continuity/constancy of the Hamiltonian function in a Pontryagin maximum principle for optimal sampled-data controls with free sampling times*, Mathematics of Control, Signals and Systems, vol. 31 (4), pp. 503—544, 2019.
- [7] L. Bourdin, T. Bakir, B. Bonnard, J. Rouot, *Pontryagin-type conditions for optimal muscular force response to functional electrical stimulations*, Journal of Optimization Theory and Applications, 184, pp. 581—602, 2020.
- [8] S. Adly, F. Nacry, L. Thibault, *Discontinuous sweeping process with prox-regular sets*, ESAIM : Control, Optim. Calc. Var., 23, pp. 1293—1329, 2017.